

ВЫЧИСЛЕНИЕ АВТОМОРФИЗМОВ НЕКОТОРЫХ ГРУПП ЛИ КАК РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Владимир Александрович Кыров

Горно-Алтайский государственный университет,

Горно-Алтайск, Россия

kyrovVA@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0001-5925-7706>

Аннотация

В данной статье предлагается метод вычисления группы автоморфизмов группы Ли как решение системы функциональных уравнений. Этим методом найдены группы автоморфизмов для трех матричных групп Ли. Найдены подгруппы внутренних автоморфизмов. Вычислены факторгруппы групп автоморфизмов по подгруппам внутренних автоморфизмов.

Ключевые слова и фразы

группа Ли, автоморфизм, внутренний автоморфизм, функциональное уравнение

Для цитирования

Кыров В. А. Вычисление автоморфизмов некоторых групп Ли как решений систем функциональных уравнений // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 3, С. 169-191. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-169-191

Calculation of automorphisms of certain Lie groups as solutions to systems of functional equations

Vladimir A. Kyrov

Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, Russia

kyrovVA@yandex.ru

Abstract

This article proposes a method for calculating the automorphism group of a Lie group by solving a system of functional equations. This method is used to find automorphism groups for three matrix Lie groups. Subgroups of inner automorphisms are found. Factor groups of automorphism groups by subgroups of inner automorphisms are calculated.

Keywords

Lie group, automorphism, inner automorphism, functional equation

For citation

Kyrov V. A. Calculation of automorphisms of certain Lie groups as solutions to systems of functional equations // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 3, P. 169-191. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-169-191

Введение

Как известно, группой Ли называется группа $(G, \circ)$, снабженная структурой дифференцируемого многообразия таким образом, что бинарная операция является дифференцируемым отображением [1].

Диффеоморфизм $f : G \rightarrow G$ группы Ли G является автоморфизмом, если выполняется тождество:

$$f(x \circ y) = f(x) \circ f(y), \quad (1)$$

для любых x и y из G . Автоморфизм вида

$$f_a(x) = a \circ x \circ a^{-1}, \quad (2)$$

где a – некоторый элемент из G , а x – произвольный элемент из G , называется внутренним.

Цель данной статьи, для конкретной группы Ли G найти все её автоморфизмы. Заметим, что здесь ищутся только автоморфизмы, являющиеся диффеоморфизмами. Задача нахождения, например, дискретных

автоморфизмов не ставится. Для решения этой задачи тождество (1) рассматривается как функциональное уравнение, обобщающее уравнение Коши $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$, если полагать $G = R_+$, $\circ$ — обычное умножение в группе положительных вещественных чисел. В таком случае, как хорошо известно, уравнение Коши имеет решение $f(x) = x^c$, $c = \text{const}$.

§ 1. Группы Ли

Приведем список групп Ли, связанных с двуметрическими геометриями двух множеств из [2, стр. 113, 114], для которых ниже будем находить автоморфизмы. Везде ниже локальные координаты точек групп Ли G_1 — G_5 обозначаются греческими буквами такими, как: ξ, η, μ, ν .

1. G_1 — первая группа Ли, точки которой $(\xi, \eta) \in G_1$ можно представить матрицами $\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Бинарная операция:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \eta_2 + \eta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На точках: $(\xi_1, \eta_1) \circ (\xi_2, \eta_2) = (\xi_1 \xi_2, \xi_1 \eta_2 + \eta_1)$. Единицей является элемент $e = (1, 0)$.

2. G_2 — вторая группа Ли, точки которой $(\xi, \eta, \mu, \nu) \in G_2$ представляются матрицами $\begin{pmatrix} \xi & 0 & \mu \\ \eta & \xi & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Бинарная операция:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \mu_1 \\ \eta_1 & \xi_1 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \xi_2 & 0 & \mu_2 \\ \eta_2 & \xi_2 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 & 0 & \mu_2 \xi_1 + \mu_1 \\ \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1 & \xi_1 \xi_2 & \mu_2 \eta_1 + \nu_2 \xi_1 + \nu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На точках: $(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) \circ (\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) = (\xi_1 \xi_2, \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1, \mu_2 \xi_1 + \mu_1, \mu_2 \eta_1 + \nu_2 \xi_1 + \nu_1)$.

3. В третьей группе G_3 точки $(\xi, \eta, \mu, \nu) \in G_3$ представляются матрицами $\begin{pmatrix} \xi & -\eta & \mu \\ \eta & \xi & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Бинарная операция:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_1 & \mu_1 \\ \eta_1 & \xi_1 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \xi_2 & -\eta_2 & \mu_2 \\ \eta_2 & \xi_2 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2 & -\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 & \mu_2 \xi_1 - \eta_1 \nu_2 + \mu_1 \\ \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1 & \xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2 & \mu_2 \eta_1 + \nu_2 \xi_1 + \nu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На точках: $(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) \circ (\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) = (\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 - \eta_1\nu_2 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1)$.

4. В группе G_4 , точки $(\xi, \eta, \mu, \nu) \in G_4$ можно представить матрицами $\begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu \\ \eta & \xi & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Бинарная операция:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \mu_1 \\ \eta_1 & \xi_1 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \xi_2 & \eta_2 & \mu_2 \\ \eta_2 & \xi_2 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 & \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 & \mu_2\xi_1 + \eta_1\nu_2 + \mu_1 \\ \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 & \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 & \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На точках: $(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) \circ (\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) = (\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \eta_1\nu_2 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1)$.

5. И, наконец, в пятой группе G_5 , точки $(\xi, \eta, \mu, \nu) \in G_5$ представляются матрицами $\begin{pmatrix} \xi & 0 & \mu \\ \eta & \xi^c & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c \neq 1$, $\xi > 0$. Бинарная операция:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \mu_1 \\ \eta_1 & \xi_1^c & \nu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \xi_2 & 0 & \mu_2 \\ \eta_2 & \xi_2^c & \nu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_2 & 0 & \mu_2\xi_1 + \mu_1 \\ \xi_1^c\eta_2 + \xi_2\eta_1 & \xi_1^c\xi_2^c & \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1^c + \nu_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На точках: $(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) \circ (\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) = (\xi_1\xi_2, \xi_1^c\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1^c + \nu_1)$.

В группах $G_2 - G_5$ элемент $e = (1, 0, 0, 0)$ является единичным.

§ 2. Автоморфизмы группы G_1

Аutomорфизм группы Ли G_1 задаётся функциями $f : (\xi, \eta) \mapsto (\sigma_1(\xi, \eta), \sigma_2(\xi, \eta))$, которые удовлетворяют функциональному уравнению (1). В явном виде оно расписывается как система уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \eta_1) &= \sigma_1(\xi_1, \eta_1)\sigma_1(\xi_2, \eta_2), \\ \sigma_2(\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \eta_1) &= \sigma_1(\xi_1, \eta_1)\sigma_2(\xi_2, \eta_2) + \sigma_2(\xi_1, \eta_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Так как f – диффеоморфизм, то $\Delta = \frac{\partial(\sigma_1, \sigma_2)}{\partial(\xi, \eta)} \neq 0$.

Замечание. Здесь и везде ниже производные дифференцируемых функции σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, по переменным ξ, η, μ, ν обозначаются так: $\sigma_{i\xi}, \sigma_{i\eta}, \sigma_{i\mu}, \sigma_{i\nu}$.

Теорема 1. Автоморфизм $f : (\xi, \eta) \mapsto (\sigma_1(\xi, \eta), \sigma_2(\xi, \eta))$ группы Ли G_1 имеет следующий явный общий вид:

$$\sigma_1 = \xi, \sigma_2 = b_1\xi + b_2\eta - b_1, \quad (4)$$

где $b_1, b_2 = \text{const}$, $b_2 \neq 0$.

Доказательство. Введем обозначения: $\sigma_{1\xi}(e) = a_1$, $\sigma_{1\eta}(e) = a_2$, $\sigma_{2\xi}(e) = b_1$, $\sigma_{2\eta}(e) = b_2$, причем $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, a_1, a_2, b_1, b_2 – постоянные. Продифференцируем систему функциональных уравнений (3) по переменным ξ_2, η_2 , после чего подставим $(\xi_1, \eta_1) \rightarrow (\xi, \eta)$, $(\xi_2, \eta_2) \rightarrow (1, 0)$, а затем воспользуемся выше сделанными обозначениями:

$$\xi\sigma_{1\xi} = a_1\sigma_1, \xi\sigma_{1\eta} = a_2\sigma_1, \xi\sigma_{2\xi} = b_1\sigma_1, \xi\sigma_{2\eta} = b_2\sigma_1.$$

Интегрируя, получаем:

$$\sigma_1 = c_1\xi, \sigma_2 = b_1c_1\xi + b_2c_1\eta + c_2,$$

где $c_1 = \text{const}$, $c_2 = \text{const}$, $a_1 = 1$, $c_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Далее найденное подставляя в (3), получаем $c_1 = 1$, $c_2 = -b_1$. В результате имеем (4). $\square$

Следствие 1. Автоморфизм (4) группы Ли G_1 является внутренним.

Для доказательства необходимо вычислить сопряжение по формуле (2):

$$\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m \neq 0.$$

Непосредственные вычисления дают:

$$\begin{pmatrix} x & \eta/n + n\xi/m - n/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает справедливость утверждения. $\square$

Как известно, множество всех автоморфизмов группы является группой, называемой группой автоморфизмов. Поэтому в теореме 1 найдена группа автоморфизмов $Aut(G_1)$ группы G_1 . Заметим, что группу $Aut(G_1)$ можно рассмотреть как группу Ли преобразований пространства V_2 , состоящего из элементов $(\xi, \eta, 1)^T$, с эффективно действующей группой Ли

$$Aut_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Автоморфизмы группы G_2

Автоморфизм в группе Ли G_2 задается функциями $f : (\xi, \eta, \mu, \nu) \mapsto (\sigma_1(\xi, \eta, \mu, \nu), \sigma_2(\xi, \eta, \mu, \nu), \sigma_3(\xi, \eta, \mu, \nu), \sigma_4(\xi, \eta, \mu, \nu))$, удовлетворяющими условию (1). Из (1) вытекает, что для нахождения явного вида автоморфизма требуется решить систему функциональных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1(\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_1(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2); \\ \sigma_2(\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_2(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_1(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2); \\ \sigma_3(\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_3(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_3(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1); \\ \sigma_4(\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_3(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_4(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_4(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1), \end{array} \right. \quad (5)$$

причем $\Delta = \frac{\partial(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)}{\partial(\xi, \eta, \mu, \nu)} \neq 0$.

Теорема 2. Автоморфизм f группы Ли G_2 имеет следующий явный общий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \xi, \quad \sigma_2 = a_{22}\eta, \quad \sigma_3 = a_{33}\mu + a_{31}\xi - a_{31}, \\ \sigma_4 &= a_{43}\mu + a_{22}a_{33}\nu + a_{31}\eta + a_{41}\xi - a_{41}, \end{aligned}$$

причем $a_{22}, a_{33}, a_{31}, a_{41}, a_{43} = \text{const}$, $a_{22}a_{33} \neq 0$.

Доказательство. Введем сначала обозначения:

$$(\partial\sigma_i/\partial\xi)(e) = a_{i1}, (\partial\sigma_i/\partial\eta)(e) = a_{i2}, (\partial\sigma_i/\partial\mu)(e) = a_{i3}, (\partial\sigma_i/\partial\nu)(e) = a_{i4}, \quad (6)$$

где $a_{ij} = \text{const}$, по свойству автоморфизма

$$\Delta(e) = \det |a_{ij}| \neq 0, \quad (7)$$

$i, j = 1, 2, 3, 4$. Из определения автоморфизма также вытекает

$$f(e) = e. \quad (8)$$

Решаем сначала первое уравнение. Для этого продифференцируем его по $\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1$, после чего введем подстановку: $(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) = (\xi, \eta, \mu, \nu)$, $(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) = (1, 0, 0, 0)$. Тогда имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi} + \eta \frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta} + \mu \frac{\partial\sigma_1}{\partial\mu} + \nu \frac{\partial\sigma_1}{\partial\nu} &= a_{11}\sigma_1, \\ \xi \frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta} + \mu \frac{\partial\sigma_1}{\partial\nu} &= a_{12}\sigma_1, \quad \frac{\partial\sigma_1}{\partial\mu} = a_{13}\sigma_1, \quad \frac{\partial\sigma_1}{\partial\nu} = a_{14}\sigma_1. \end{aligned}$$

Решая систему, находим

$$\sigma_1 = c_1 |\xi|^{a_{11}} e^{a_{12}\eta/\xi}, a_{13} = a_{14} = 0, c_1 = \text{const} \neq 0.$$

Далее возвращаясь в первое функциональное уравнение, получаем:

$$\sigma_1 = |\xi|^{a_{11}} e^{a_{12}\eta/\xi}, c_1 = 1.$$

Затем найденное подставляем во второе функциональное уравнение из (5):

$$\sigma_2(\xi_1 \xi_2, \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1, \mu_2 \xi_1 + \mu_1, \mu_2 \eta_1 + \nu_2 \xi_1 + \nu_1) = |\xi_1|^{a_{11}} e^{a_{12}\eta_1/\xi_1} \sigma_2(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) |\xi_2|^{a_{11}} e^{a_{12}\eta_2/\xi_2}.$$

Продифференцируем это уравнение по переменным $\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1$ и сделаем подстановку: $(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) = (\xi, \eta, \mu, \nu)$, $(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) = (1, 0, 0, 0)$. Получим новую систему дифференциальных уравнений:

$$\xi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} = a_{11} \sigma_2 + a_{21} |\xi|^{a_{11}} e^{a_{12}\eta/\xi},$$

$$\xi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} = a_{12} \sigma_2 + a_{22} |\xi|^{a_{11}} e^{a_{12}\eta/\xi},$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu} = a_{23} \xi^{a_{11}} e^{a_{12}\eta/\xi}, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} = a_{24} |\xi|^{a_{11}} e^{a_{12}\eta/\xi}.$$

Получим решение:

$$\sigma_2 = (c_2 + a_{21} |\xi|^{a_{11}} \ln |\xi| + a_{22} \eta |\xi|^{a_{11}-1}) e^{a_{12}\eta/\xi}, \quad a_{23} = a_{24} = 0.$$

Из условия $\Delta \neq 0$ вытекает

$$\sigma_2 = (a_{21} |\xi|^{a_{11}} \ln \xi + a_{22} \eta |\xi|^{a_{11}-1}) e^{a_{12}\eta/\xi}, \quad a_{23} = a_{24} = 0.$$

Теперь решаем третье функциональное уравнение. Учитывая решение первого, имеем

$$\sigma_3(\xi_1 \xi_2, \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1, \mu_2 \xi_1 + \mu_1, \mu_2 \eta_1 + \nu_2 \xi_1 + \nu_1) = |\xi_1|^{a_{11}} e^{a_{12}\eta_1/\xi_1} \sigma_3(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_3(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1).$$

Потом продифференцируем его по $\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1$, после чего введем подстановку: $(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) = (\xi, \eta, \mu, \nu)$, $(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) = (1, 0, 0, 0)$. Тогда получим систему:

$$\xi \frac{\partial \sigma_3}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_3}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_3}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} = a_{11} \sigma_3 + a_{31},$$

$$\xi \frac{\partial \sigma_3}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} = a_{12}\sigma_3 + a_{32}, \quad \frac{\partial \sigma_3}{\partial \mu} = a_{33}, \quad \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} = a_{34}.$$

Решая последние уравнения, имеем $\sigma_3 = a_{33}\mu + a_{34}\nu + \widehat{\sigma}_3(\xi, \eta)$, подставляя во второе, при $a_{12} \neq 0$, получаем $a_{33} = a_{34} = 0$, что противоречит условию автоморфизма. При $a_{12} = 0$ имеем решение

$$\sigma_3 = a_{33}\mu + a_{31}\xi - a_{31}, \quad a_{11} = 1, \quad a_{32} = a_{34} = 0, \quad a_{33} \neq 0.$$

Тогда

$$\sigma_1 = \xi, \quad \sigma_2 = a_{21}\xi \ln |\xi| + a_{22}\eta.$$

Наконец, решаем четвертое функциональное уравнение. Учитывая решения первого, второго и третьего, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_4(\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ (a_{21}\xi_1 \ln |\xi_1| + a_{22}\eta_1)(a_{33}\mu_2 + a_{31}\xi_2 - a_{31}) + \\ \xi_1\sigma_4(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_4(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1). \end{aligned}$$

Потом продифференцируем его по $\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1$, после чего введем подстановку: $(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) = (\xi, \eta, \mu, \nu)$, $(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) = (1, 0, 0, 0)$. Тогда имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{21}(a_{33}\mu + a_{31}\xi - a_{31}) + \sigma_4 + a_{41}, \\ \xi \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{22}(a_{33}\mu + a_{31}\xi - a_{31}) + a_{42}, \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} = a_{43}, \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{44}. \end{aligned}$$

Решая последние уравнения, имеем $\sigma_4 = a_{43}\mu + a_{44}\nu + \widehat{\sigma}_4(\xi, \eta)$, подставляя во второе, получаем $\widehat{\sigma}_4(\xi, \eta) = a_{31}\eta + (a_{42} - a_{22}a_{31})\eta/\xi + f(\xi)$, $a_{44} = a_{22}a_{33}$. Далее идем в первое уравнение, получаем $a_{21} = 0$, $a_{42} = a_{22}a_{31}$, значит

$$\sigma_4 = a_{43}\mu + a_{22}a_{33}\nu + a_{31}\eta + c_4\xi - a_{41}.$$

Из (8) вытекает:

$$\sigma_4 = a_{43}\mu + a_{22}a_{33}\nu + a_{31}\eta + a_{41}\xi - a_{41}.$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. Множество автоморфизмов, вычисленных в теореме 2, содержит подмножество внутренних автоморфизмов:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \xi, \quad \sigma_2 = \eta, \quad \sigma_3 = a_{33}\mu + a_{31}\xi - a_{31}, \\ \sigma_4 = a_{43}\mu + a_{33}\nu + a_{31}\eta + a_{41}\xi - a_{41}. \end{aligned}$$

Данное следствие доказывается как и следствие теоремы 1.

В теореме 2 найдена группа автоморфизмов $Aut(G_2)$ группы G_2 . Её можно представить как результат эффективного действия группы Ли

$$Aut_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & -a_{31} \\ a_{41} & a_{31} & a_{43} & a_{22}a_{33} & -a_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в пространстве V_4 , состоящем из элементов $(\xi, \eta, \mu, \nu, 1)^T$. Согласно следствию группа автоморфизмов $Aut(G_2)$ содержит нормальную подгруппу внутренних автоморфизмов $Inn(G_2)$, которая является результатом эффективного действия в V_4 группы

$$Inn_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & -a_{31} \\ a_{41} & a_{31} & a_{43} & a_{33} & -a_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Несложно вычисляется фактор-группа:

$$Aut_2/Inn_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong R/0.$$

§ 4. Автоморфизмы группы G_3

Нахождение всех автоморфизмов в группе G_3 сводится к решению системы функциональных уравнений, вытекающей из условия (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 - \eta_1\nu_2 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_1(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) - \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_2(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2); \\ \sigma_2(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 - \eta_1\nu_2 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_2(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_1(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2); \\ \sigma_3(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 - \eta_1\nu_2 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_3(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) - \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_4(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \\ \sigma_3(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1); \\ \sigma_4(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 - \eta_1\nu_2 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_3(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_4(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \\ \sigma_4(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1), \end{array} \right. \quad (9)$$

причем $\Delta = \partial(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)/\partial(\xi, \eta, \mu, \nu) \neq 0$.

Теорема 3. Автоморфизм f группы Ли G_3 имеет следующий явный общий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \xi, \quad \sigma_2 = \pm\eta, \quad \sigma_3 = a_{31}\xi \mp a_{41}\eta + a_{33}\mu \mp a_{43}\nu - a_{31}, \\ \sigma_4 &= a_{41}\xi \pm a_{31}\eta + a_{43}\mu \pm a_{33}\nu - a_{41}.\end{aligned}$$

причем $a_{33}, a_{31}, a_{41}, a_{43} = \text{const}$, $a_{33}^2 + a_{43}^2 \neq 0$.

Доказательство. Продифференцируем функциональные уравнения (9) по $\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1$, после чего введем подстановку: $(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) = (\xi, \eta, \mu, \nu)$, $(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) = (1, 0, 0, 0)$ и воспользуемся условиями (6) – (8). Тогда имеем четыре системы дифференциальных уравнений:

первая система

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} &= a_{11}\sigma_1 - a_{21}\sigma_2; \\ -\eta \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_1}{\partial \eta} - \nu \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} &= a_{12}\sigma_1 - a_{22}\sigma_2; \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu} &= a_{13}\sigma_1 - a_{23}\sigma_2; \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} = a_{14}\sigma_1 - a_{24}\sigma_2,\end{aligned}$$

вторая система:

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} &= a_{11}\sigma_2 + a_{21}\sigma_1; \\ -\eta \frac{\partial \sigma_2}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} - \nu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} &= a_{12}\sigma_2 + a_{22}\sigma_1; \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu} &= a_{13}\sigma_2 + a_{23}\sigma_1; \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} = a_{14}\sigma_2 + a_{24}\sigma_1,\end{aligned}$$

третья система:

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial \sigma_3}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_3}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_3}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} &= a_{11}\sigma_3 - a_{21}\sigma_4 + a_{31}; \\ -\eta \frac{\partial \sigma_3}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_3}{\partial \eta} - \nu \frac{\partial \sigma_3}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} &= a_{12}\sigma_3 - a_{22}\sigma_4 + a_{32}; \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial \mu} &= a_{13}\sigma_3 - a_{23}\sigma_4 + a_{33}; \quad \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} = a_{14}\sigma_3 - a_{24}\sigma_4 + a_{34},\end{aligned}$$

четвертая система:

$$\xi \frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{21}\sigma_3 + a_{11}\sigma_4 + a_{41};$$

$$-\eta \frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} - \nu \frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{22}\sigma_3 + a_{12}\sigma_4 + a_{42};$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} = a_{23}\sigma_3 + a_{13}\sigma_4 + a_{43}; \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{24}\sigma_3 + a_{14}\sigma_4 + a_{44}.$$

Далее введем обозначения: $u = \sigma_1 + i\sigma_2$, $v = \sigma_3 + i\sigma_4$, $A_{12} = a_{11} + ia_{21}$, $A_{22} = a_{12} + ia_{22}$, $A_{32} = a_{13} + ia_{23}$, $A_{42} = a_{14} + ia_{24}$, $A_1 = a_{31} + ia_{41}$, $A_2 = a_{32} + ia_{42}$, $A_3 = a_{33} + ia_{43}$, $A_4 = a_{34} + ia_{44}$, $i^2 = -1$. Тогда предыдущие системы принимают вид:

$$\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial u}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial u}{\partial \nu} = A_{12}u;$$

$$-\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial u}{\partial \eta} - \nu \frac{\partial u}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} = A_{22}u;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = A_{32}u; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = A_{42}u,$$

$$\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial v}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial v}{\partial \nu} = A_{12}v + A_1;$$

$$-\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial v}{\partial \eta} - \nu \frac{\partial v}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial v}{\partial \nu} = A_{22}v + A_2;$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mu} = A_{32}v + A_3; \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = A_{42}v + A_4,$$

Решая третье и четвертое уравнения этих систем, а затем подставляя в первые два, получаем $A_{32} = A_{42} = 0$, тогда будем иметь:

$$u = \widehat{u}(\xi, \eta), \quad v = \widehat{v}(\xi, \eta) + A_3\mu + A_4\nu,$$

при этом $A_3 = A_3A_{12}$, $A_4 = A_4A_{12}$, $A_3 = -A_4A_{22}$, $A_4 = A_3A_{22}$. Тогда возможны два случая: 1) $A_3 = A_4 = 0$, A_{12} , A_{22} — произвольные, 2) $A_3 \neq 0$ и $A_4 \neq 0$, следовательно $A_{12} = 1$, $A_{22} = \pm i$, $A_4 = \pm iA_3$.

1). Первый случай не приводит к автоморфизму.

2). Во втором случае имеем системы дифференциальных уравнений:

$$\xi \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \eta} = \widehat{u}, \quad -\eta \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \eta} = \pm i\widehat{u},$$

$$\xi \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \eta} = \widehat{v} + A_1, \quad -\eta \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \eta} = \pm i\widehat{v} + A_2.$$

Решая первые два уравнения, получаем

$$u = \widehat{u} = \xi \pm i\eta.$$

Решая третье уравнение, получаем $\widehat{v} = \xi\varphi(\eta/\xi) - A_1$, после чего идем в четвертое уравнение и получаем равенство $(1 + \eta^2/\xi^2)\varphi'(\eta/\xi) - (\eta/\xi \mp i)\varphi(\eta/\xi) = (A_2 \mp iA_1)/\xi$. Из данного равенства вытекает $A_2 = \pm iA_1$. Тогда приходим к дифференциальному уравнению $(1 + \eta^2/\xi^2)\varphi'(\eta/\xi) - (\eta/\xi \mp i)\varphi(\eta/\xi) = 0$. Решение этого уравнения, имеет вид:

$$v = c(\xi \pm i\eta) + A_3(\mu \pm \nu) - A_1.$$

Далее возвращаясь в исходные функциональные уравнения, получаем

$$v = A_1(\xi \pm i\eta) + A_3(\mu \pm \nu) - A_1.$$

Таким образом, теорема 3 доказана. $\square$

Следствие 3. Множество автоморфизмов, вычисленных в теореме 3, содержит подмножество внутренних автоморфизмов:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \xi, \sigma_2 = \eta, \sigma_3 = a_{31}\xi - a_{41}\eta + a_{33}\mu - a_{43}\nu - a_{31}, \\ \sigma_4 &= a_{41}\xi + a_{31}\eta + a_{43}\mu + a_{33}\nu - a_{41}.\end{aligned}$$

Данное следствие доказывается как и следствие теоремы 1.

В теореме 3 найдена группа автоморфизмов $Aut(G_3)$ группы G_3 . Она является результатом эффективного действия группы Ли

$$Aut_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & \mp a_{41} & a_{33} & \mp a_{43} & -a_{31} \\ a_{41} & \pm a_{31} & a_{43} & \pm a_{33} & -a_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в V_4 . Согласно следствию группа автоморфизмов $Aut(G_3)$ содержит нормальную подгруппу внутренних автоморфизмов $Inn(G_3)$, которая является результатом эффективного действия группы

$$Inn_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & -a_{41} & a_{33} & -a_{43} & -a_{31} \\ a_{41} & a_{31} & a_{43} & a_{33} & -a_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя, получаем фактор-группу:

$$Aut_3/Inn_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong Z_2.$$

§ 5. Автоморфизмы группы G_4 .

Для вычисления автоморфизмов в группе G_4 необходимо решить систему функциональных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \eta_1\nu_2 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_1(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_2(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2); \\ \sigma_2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \eta_1\nu_2 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_2(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_1(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2); \\ \sigma_3(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \eta_1\nu_2 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_3(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_4(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \\ \sigma_3(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1); \\ \sigma_4(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \eta_1\nu_2 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) = \\ \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_3(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_4(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \\ \sigma_4(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1), \end{array} \right. \quad (10)$$

в которой $\Delta = \partial(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)/\partial(\xi, \eta, \mu, \nu) \neq 0$.

Теорема 4. Автоморфизм f группы Ли G_4 имеет следующий явный общий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \xi, \quad \sigma_2 = \pm\eta, \quad \sigma_3 = a_{31}\xi + a_{41}\eta + a_{33}\mu + a_{43}\nu - a_{31}, \\ \sigma_4 &= \pm a_{41}\xi \pm a_{31}\eta \pm a_{43}\mu \pm a_{33}\nu \mp a_{41}. \end{aligned}$$

причем $a_{33}, a_{31}, a_{41}, a_{43} = \text{const}$, $a_{33}^2 - a_{43}^2 \neq 0$.

Доказательство. Продифференцируем функциональные уравнения из (10) по $\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1$, после чего введем подстановку: $(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) = (\xi, \eta, \mu, \nu)$, $(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) = (1, 0, 0, 0)$. Тогда имеем четыре системы дифференциальных уравнений:

первая система

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} &= a_{11}\sigma_1 + a_{21}\sigma_2; \\ \eta \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_1}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} &= a_{12}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2; \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu} &= a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2; \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} = a_{14}\sigma_1 + a_{24}\sigma_2, \end{aligned}$$

вторая система:

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} &= a_{11}\sigma_2 + a_{21}\sigma_1; \\ \eta \frac{\partial \sigma_2}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} &= a_{12}\sigma_2 + a_{22}\sigma_1; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu} = a_{13}\sigma_2 + a_{23}\sigma_1; \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} = a_{14}\sigma_2 + a_{24}\sigma_1,$$

третья система:

$$\xi \frac{\partial \sigma_3}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_3}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_3}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} = a_{11}\sigma_3 + a_{21}\sigma_4 + a_{31};$$

$$\eta \frac{\partial \sigma_3}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_3}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \sigma_3}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} = a_{12}\sigma_3 + a_{22}\sigma_4 + a_{32};$$

$$\frac{\partial \sigma_3}{\partial \mu} = a_{13}\sigma_3 + a_{23}\sigma_4 + a_{33}; \quad \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} = a_{14}\sigma_3 + a_{24}\sigma_4 + a_{34},$$

четвертая система:

$$\xi \frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{21}\sigma_3 + a_{11}\sigma_4 + a_{41};$$

$$\eta \frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{22}\sigma_3 + a_{12}\sigma_4 + a_{42};$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} = a_{23}\sigma_3 + a_{13}\sigma_4 + a_{43}; \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{24}\sigma_3 + a_{14}\sigma_4 + a_{44}.$$

Далее введем обозначения: $u = \sigma_1 \pm \sigma_2$, $v = \sigma_3 \pm \sigma_4$, $A_{12} = a_{11} \pm a_{21}$, $A_{22} = a_{12} \pm a_{22}$, $A_{32} = a_{13} \pm a_{23}$, $A_{42} = a_{14} \pm a_{24}$, $A_1 = a_{31} \pm a_{41}$, $A_2 = a_{32} \pm a_{42}$, $A_3 = a_{33} \pm a_{43}$, $A_4 = a_{34} \pm a_{44}$. Тогда предыдущие системы принимают вид:

$$\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial u}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial u}{\partial \nu} = A_{12}u;$$

$$\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial u}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial u}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} = A_{22}u;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = A_{32}u; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = A_{42}u,$$

$$\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial v}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial v}{\partial \nu} = A_{12}v + A_1;$$

$$\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial v}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial v}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial v}{\partial \nu} = A_{22}v + A_2;$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mu} = A_{32}v + A_3; \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = A_{42}v + A_4,$$

Решая третьи и четвертые уравнения этих систем, а затем подставляя в первые два, получаем $A_{32} = A_{42} = 0$, тогда будем иметь:

$$u = \hat{u}(\xi, \eta), \quad v = \hat{v}(\xi, \eta) + A_3\mu + A_4\nu,$$

при этом $A_3 = A_3A_{12}$, $A_4 = A_4A_{12}$, $A_3 = -A_4A_{22}$, $A_4 = A_3A_{22}$. Тогда возможны два случая: 1) $A_3 = A_4 = 0$, A_{12} , A_{22} — произвольные, 2) $A_3 \neq 0$ и $A_4 \neq 0$, следовательно $A_{12} = 1$, $A_{22} = \pm 1$, $A_4 = \pm A_3$.

1). Первый случай не приводит к автоморфизму.

2). Во втором случае имеем системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} &= \hat{u}, \quad \eta \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} = \pm \hat{u}, \\ \xi \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} &= \hat{v} + A_1, \quad \eta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} = \pm \hat{v} + A_2.\end{aligned}$$

Решая первые два уравнения, получаем

$$u = \hat{u} = \xi \pm \eta.$$

Решая третье и четвертое уравнения, получаем

$$v = A_1(\xi \pm \eta) + A_3(\mu \pm \nu) - A_1.$$

Таким образом, теорема 4 доказана.

Следствие 4. Множество автоморфизмов, вычисленных в теореме 4, содержит подмножество внутренних автоморфизмов:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \xi, \quad \sigma_2 = \eta, \quad \sigma_3 = a_{31}\xi + a_{41}\eta + a_{33}\mu + a_{43}\nu - a_{31}, \\ \sigma_4 &= a_{41}\xi + a_{31}\eta + a_{43}\mu + a_{33}\nu - a_{41}.\end{aligned}$$

Данное следствие доказывается как и следствие теоремы 1.

В теореме 4 найдена группа автоморфизмов $\text{Aut}(G_4)$ группы G_4 . Её можно представить как результат эффективного действия группой Ли

$$\text{Aut}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{41} & a_{33} & a_{43} & -a_{31} \\ \pm a_{41} & \pm a_{31} & \pm a_{43} & \pm a_{33} & \mp a_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в V_4 . Согласно следствию группа автоморфизмов $\text{Aut}(G_4)$ содержит нормальную подгруппу внутренних автоморфизмов $\text{Inn}(G_4)$, которая является результатом эффективного действия группы

$$\text{Inn}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{41} & a_{33} & a_{43} & -a_{31} \\ a_{41} & a_{31} & a_{43} & a_{33} & -a_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя, получаем фактор-группу:

$$\text{Aut}_4/\text{Inn}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong Z_2.$$

§ 6. Автоморфизмы группы G_5

Нахождение всех автоморфизмов в группе G_5 сводится к решению системы функциональных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1(\xi_1\xi_2, \xi_1^c\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1^c + \nu_1) = \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_1(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2); \\ \sigma_2(\xi_1\xi_2, \xi_1^c\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1^c + \nu_1) = \\ \sigma_1^c(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_2(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_1(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2); \\ \sigma_3(\xi_1\xi_2, \xi_1^c\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1^c + \nu_1) = \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_3(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_3(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1); \\ \sigma_4(\xi_1\xi_2, \xi_1^c\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1^c + \nu_1) = \\ \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_3(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_1^c(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_4(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \\ \sigma_4(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1), \end{array} \right. \quad (11)$$

в которой $\Delta = \partial(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)/\partial(\xi, \eta, \mu, \nu) \neq 0$.

Теорема 5. Автоморфизм f группы Ли G_5 задается одним из следующих равенств:

1.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \xi^{-1}, \quad \sigma_2 = a_{23}\mu\xi^{-1} - a_{21}\xi^{-1} + a_{21}, \quad \sigma_3 = a_{32}\eta\xi^{-1} - a_{31}\xi^{-1} + a_{31}, \\ \sigma_4 &= -a_{32}a_{23}\nu - a_{31}a_{23}\mu\xi^{-1} + a_{32}a_{23}\mu\eta\xi^{-1} - a_{32}a_{21}\eta\xi^{-1} + \\ &\quad + a_{31}a_{21}\xi^{-1} + (a_{41} + a_{31}a_{21})\ln \xi - a_{31}a_{21}, \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \xi, \quad \sigma_2 = a_{22}\eta + a_{21}\xi^{c-1}/(c-1) - a_{21}\xi/(c-1), \\ \sigma_3 &= a_{33}\mu + a_{31}\xi - a_{31}, \\ \sigma_4 &= (a_{41} + a_{31}a_{21}/(c-1))\xi^c/c - a_{31}a_{21}\xi/(c-1) + \\ &\quad + a_{31}a_{22}\eta - a_{33}a_{21}\mu/(c-1) + a_{22}a_{33}\nu - (a_{41} - a_{31}a_{21})/c, \quad c \neq 0, \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \xi, \quad \sigma_2 = a_{22}\eta + a_{21}\xi - a_{21}, \quad \sigma_3 = a_{33}\mu + a_{31}\xi - a_{31}, \\ \sigma_4 &= (a_{41} - a_{31}a_{21})\ln \xi + a_{31}a_{21}\xi + a_{31}a_{22}\eta + a_{33}a_{21}\mu + a_{22}a_{33}\nu - a_{31}a_{21}, \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \xi, \quad \sigma_2 = a_{23}\mu\xi + a_{22}\eta + a_{21}\xi^2 - a_{21}\xi, \quad \sigma_3 = a_{33}\mu + a_{31}\xi - a_{31}, \\ \sigma_4 &= a_{31}a_{23}\xi\mu + (a_{41} + a_{31}a_{21})\xi^2/2 - a_{31}a_{21}\xi + a_{33}a_{23}\mu^2/2 - \\ &\quad - a_{33}a_{21}\mu + a_{31}a_{22}\eta + a_{22}a_{33}\nu - (a_{41} - a_{31}a_{21})/2, \quad a_{23} \neq 0,\end{aligned}$$

причем $a_{41}, a_{31}, a_{33}, a_{21}, a_{22}, a_{23} = \text{const}$, $a_{22}a_{33} \neq 0$, $c \neq 1$.

Доказательство. Продифференцируем функциональные уравнения (11) по ξ, η, μ, ν , после чего введем подстановку: $(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) = (\xi, \eta, \mu, \nu)$, $(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) = (1, 0, 0, 0)$. Тогда имеем системы дифференциальных уравнений:

Первая система

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_1}{\partial \eta} &= a_{11}\sigma_1, \quad \xi^c \frac{\partial \sigma_1}{\partial \eta} = a_{12}\sigma_1, \\ \xi \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu} + \eta \frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} &= a_{13}\sigma_1, \quad \xi^c \frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} = a_{14}\sigma_1.\end{aligned}$$

Вторая система

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} &= a_{11}\sigma_2 + a_{21}\sigma_1^c, \quad \xi^c \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} = a_{12}\sigma_2 + a_{22}\sigma_1^c, \\ \xi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu} + \eta \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} &= a_{13}\sigma_2 + a_{23}\sigma_1^c, \quad \xi^c \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} = a_{14}\sigma_2 + a_{24}\sigma_1^c.\end{aligned}$$

Третья система

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial \sigma_3}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_3}{\partial \eta} &= a_{31}\sigma_1, \quad \xi^c \frac{\partial \sigma_3}{\partial \eta} = a_{32}\sigma_1, \\ \xi \frac{\partial \sigma_3}{\partial \mu} + \eta \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} &= a_{33}\sigma_1, \quad \xi^c \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} = a_{34}\sigma_1.\end{aligned}$$

Четвертая система

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} &= a_{31}\sigma_2 + a_{41}\sigma_1^c, \quad \xi^c \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} = a_{32}\sigma_2 + a_{42}\sigma_1^c, \\ \xi \frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} + \eta \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} &= a_{33}\sigma_2 + a_{43}\sigma_1^c, \quad \xi^c \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{34}\sigma_2 + a_{44}\sigma_1^c.\end{aligned}$$

Решая первую систему, получаем

$$\sigma_1 = \xi^{a_{11}}, \quad a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0, \quad a_{11} \neq 0.$$

Вторая система переписывается тогда так:

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} &= a_{11} \sigma_2 + a_{21} \xi^{ca_{11}}, \quad \xi^c \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} = a_{22} \xi^{ca_{11}}, \\ \xi \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu} + \eta \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} &= a_{23} \xi^{ca_{11}}, \quad \xi^c \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} = a_{24} \xi^{ca_{11}}.\end{aligned}$$

Интегрируя третье и четвертое уравнения, получаем

$$\sigma_2 = \hat{\sigma}_2(\xi, \eta) + a_{23} \mu \xi^{ca_{11}-1} - a_{24} \mu \eta \xi^{c(a_{11}-1)-1} + a_{24} \nu \xi^{c(a_{11}-1)}.$$

Подставляя найденное во второе уравнение и дифференцируя по μ , получаем $a_{24} = 0$. Далее решая второе уравнение, имеем:

$$\sigma_2 = a_{23} \mu \xi^{ca_{11}-1} + a_{22} \eta \xi^{c(a_{11}-1)} + f(\xi).$$

Идя в первое уравнение, получаем

$$\sigma_2 = a_{23} \mu \xi^{ca_{11}-1} + a_{22} \eta \xi^{c(a_{11}-1)} + \frac{a_{21} \xi^{ca_{11}}}{a_{11}(c-1)} - \frac{a_{21} \xi^{a_{11}}}{a_{11}(c-1)},$$

$$a_{24} = 0, (a_{11} + 1 - ca_{11})a_{23} = 0, (a_{11} - 1)a_{22} = 0.$$

Третья система переписывается так:

$$\begin{aligned}\xi \frac{\partial \sigma_3}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_3}{\partial \eta} &= a_{31} \xi^{a_{11}}, \quad \xi^c \frac{\partial \sigma_3}{\partial \eta} = a_{32} \xi^{a_{11}}, \\ \xi \frac{\partial \sigma_3}{\partial \mu} + \eta \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} &= a_{33} \xi^{a_{11}}, \quad \xi^c \frac{\partial \sigma_3}{\partial \nu} = a_{34} \xi^{a_{11}}.\end{aligned}$$

Решая, получаем

$$\sigma_3 = a_{33} \mu \xi^{a_{11}-1} + a_{32} \eta \xi^{a_{11}-c} + \frac{a_{31} \xi^{a_{11}}}{a_{11}} - \frac{a_{31}}{a_{11}},$$

$$a_{34} = 0, (a_{11} + 1 - c)a_{32} = 0, (a_{11} - 1)a_{33} = 0.$$

Отметим, что из свойства автоморфизма вытекает $\begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} \neq 0$.

Далее рассмотрим два случая: 1) $a_{11} \neq 1$ и 2) $a_{11} = 1$.

1) Пусть $a_{11} \neq 1$. Тогда $a_{22} = a_{33} = 0$, $a_{23} \neq 0$, $a_{32} \neq 0$, $a_{11} = -1$, $c = 0$. Тогда

$$\sigma_1 = \xi^{-1}, \quad \sigma_2 = a_{23} \mu \xi^{-1} - a_{21} \xi^{-1} + a_{21}, \quad \sigma_3 = a_{32} \eta \xi^{-1} - a_{31} \xi^{-1} + a_{31},$$

Четвертая система принимает вид:

$$\xi \frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} = a_{31} a_{23} \mu \xi^{-1} - a_{31} a_{21} \xi^{-1} + a_{31} a_{21} + a_{41},$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} = a_{32}a_{23}\mu\xi^{-1} - a_{32}a_{21}\xi^{-1} + a_{32}a_{21} + a_{42},$$

$$\xi \frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} + \eta \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{43}, \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{34}a_{23}\mu\xi^{-1} - a_{34}a_{21}\xi^{-1} + a_{34}a_{21} + a_{44}.$$

Из третьего и четвертого уравнений вытекает

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} = a_{43}\xi^{-1} - \eta(a_{34}a_{23}\mu\xi^{-2} - a_{34}a_{21}\xi^{-2} + (a_{34}a_{21} + a_{44})\xi^{-1}).$$

Далее из второго уравнения вычисляем:

$$\frac{\partial^2 \sigma_4}{\partial \eta \partial \mu} = a_{32}a_{23}\xi^{-1},$$

а из последнего равенства

$$\frac{\partial^2 \sigma_4}{\partial \mu \partial \eta} = -(a_{34}a_{23}\mu\xi^{-2} - a_{34}a_{21}\xi^{-2} + (a_{34}a_{21} + a_{44})\xi^{-1}).$$

Приравнявая правые части, получаем $a_{34} = 0$, $a_{44} = -a_{32}a_{23}$. Возвращаясь в предыдущую систему, имеем:

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} = a_{43}\xi^{-1} + a_{32}a_{23}\eta\xi^{-1}, \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = -a_{32}a_{23},$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} = a_{32}a_{23}\mu\xi^{-1} - a_{32}a_{21}\xi^{-1} + a_{32}a_{21} + a_{42},$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} = a_{31}a_{23}\mu\xi^{-2} - a_{31}a_{21}\xi^{-2} + (a_{31}a_{21} + a_{41})\xi^{-1} - a_{32}a_{23}\eta\mu\xi^{-2} +$$

$$a_{32}a_{21}\eta\xi^{-2} + (a_{32}a_{21} + a_{42})\eta\xi^{-1}.$$

Из условия независимости частных смешанных производных от порядка дифференцирования вытекает: $a_{43} = -a_{31}a_{23}$, $a_{42} = -a_{32}a_{31}$. Тогда получим

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} = -a_{31}a_{23}\xi^{-1} + a_{32}a_{23}\eta\xi^{-1}, \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = -a_{32}a_{23},$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} = a_{32}a_{23}\mu\xi^{-1} - a_{32}a_{21}\xi^{-1},$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} = a_{31}a_{23}\mu\xi^{-2} - a_{31}a_{21}\xi^{-2} + (a_{31}a_{21} + a_{41})\xi^{-1} - a_{32}a_{23}\eta\mu\xi^{-2} + a_{32}a_{21}\eta\xi^{-2}.$$

Далее интегрируем:

$$\sigma_4 = -a_{32}a_{23}\nu - a_{31}a_{23}\mu\xi^{-1} + a_{32}a_{23}\mu\eta\xi^{-1} - a_{32}a_{21}\eta\xi^{-1} + a_{31}a_{21}\xi^{-1} +$$

$$(a_{41} + a_{31}a_{21}) \ln \xi - a_{31}a_{21}.$$

2) Теперь рассмотрим второй случай, то есть $a_{11} = 1$. Тогда $(c-2)a_{23} = 0, (c-2)a_{32} = 0$,

$$\sigma_1 = \xi, \sigma_2 = a_{23}\mu\xi^{c-1} + a_{22}\eta + a_{21}\xi^c/(c-1) - a_{21}\xi/(c-1),$$

$$\sigma_3 = a_{33}\mu + a_{32}\eta\xi^{1-c} + a_{31}\xi - a_{31}.$$

Подставляя данные выражения в функциональные уравнения (11), получаем дополнительные ограничения $a_{23}\xi^{c-2} = a_{23}, a_{32}\xi^c = a_{32}$. Тогда имеем два случая: 2.1) $c \neq 2, a_{23} = a_{32} = 0$; 2.2) $c = 2, a_{32} = 0, a_{23}$ – любое. Из свойства автоморфизма вытекает, что в обоих случаях $a_{22}a_{33} \neq 0$.

Далее сначала рассуждаем в общем виде, учитывая, что $a_{32} = 0$. Четвертая система принимает тогда такой вид:

$$\xi \frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} = a_{31}a_{23}\mu\xi^{c-1} + a_{31}a_{22}\eta + a_{31}a_{21}\xi^c/(c-1) - a_{31}a_{21}\xi/(c-1) + a_{41}\xi^c,$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} = a_{42},$$

$$\xi \frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} + \eta \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{33}a_{23}\mu\xi^{c-1} + a_{33}a_{22}\eta + a_{33}a_{21}\xi^c/(c-1) - a_{33}a_{21}\xi/(c-1) + a_{43}\xi^c,$$

$$\xi^c \frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{34}a_{23}\mu\xi^{c-1} + a_{34}a_{22}\eta + a_{34}a_{21}\xi^c/(c-1) - a_{34}a_{21}\xi/(c-1) + a_{44}\xi^c.$$

Выражая производные, имеем

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{34}a_{23}\mu\xi^{c-1} + a_{34}a_{22}\eta\xi^{-c} + a_{34}a_{21}/(c-1) - a_{34}a_{21}\xi^{1-c}/(c-1) + a_{44},$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} = a_{42},$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} = -\eta(a_{34}a_{23}\mu\xi^{-2} +$$

$$a_{34}a_{22}\eta\xi^{-c-1} + a_{34}a_{21}\xi^{-1}/(c-1) - a_{34}a_{21}\xi^{-c}/(c-1) + a_{44}\xi^{-1})$$

$$+ a_{33}a_{23}\mu\xi^{c-2} + a_{33}a_{22}\eta\xi^{-1} - a_{33}a_{21}/(c-1) + a_{33}a_{21}\xi^{c-1}/(c-1) + a_{43}\xi^{c-1},$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} = a_{31}a_{23}\mu\xi^{c-2} +$$

$$a_{31}a_{22}\eta\xi^{-1} + a_{31}a_{21}\xi^{c-1}/(c-1) - a_{31}a_{21}/(c-1) + a_{41}\xi^{c-1} - a_{42}\eta\xi^{-1}.$$

Из условия совместности, то есть равенства вторых смешанных производных $\frac{\partial^2 \sigma_4}{\partial \eta \partial \mu} = \frac{\partial^2 \sigma_4}{\partial \mu \partial \eta}$, имеем $a_{34}a_{23} = a_{34}a_{22} = 0$, значит $a_{34} = 0$, $a_{44} = a_{22}a_{33} \neq 0$. Тогда получим

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{22}a_{33}, \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} = a_{42},$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} = a_{33}a_{23}\mu\xi^{c-2} - a_{33}a_{21}/(c-1) + a_{33}a_{21}\xi^{c-1}/(c-1) + a_{43}\xi^{c-1},$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} = a_{31}a_{23}\mu\xi^{c-2} + a_{31}a_{22}\eta\xi^{-1} +$$

$$a_{31}a_{21}\xi^{c-1}/(c-1) - a_{31}a_{21}/(c-1) + a_{41}\xi^{c-1} - a_{42}\eta\xi^{-1}.$$

Из тождеств $\frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu}) = \frac{\partial}{\partial \mu}(\frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi})$ и $\frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta}) = \frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi})$ вытекает: $(c-2)a_{33}a_{23}\mu\xi^{c-3} + a_{33}a_{21}\xi^{c-2} + (c-1)a_{43}\xi^{c-2} = a_{31}a_{23}\xi^{c-2}$ и $0 = -a_{42}\xi^{-1} + a_{31}a_{22}\xi^{-1}$. Тогда $(c-2)a_{33}a_{23} = 0$, $a_{43} = (a_{31}a_{23} - a_{33}a_{21})/(c-1)$, $a_{42} = a_{31}a_{22}$. Значит окончательно имеем систему

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{22}a_{33}, \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} = a_{31}a_{22},$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} = a_{33}a_{23}\mu\xi^{c-2} - a_{33}a_{21}/(c-1) + a_{31}a_{23}\xi^{c-1}/(c-1),$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} = a_{31}a_{23}\mu\xi^{c-2} + a_{31}a_{21}\xi^{c-1}/(c-1) - a_{31}a_{21}/(c-1) + a_{41}\xi^{c-1}.$$

2.1) Пусть $c \neq 2$. Тогда имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{22}a_{33}, \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} = a_{31}a_{22}, \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} = -a_{33}a_{21}/(c-1),$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} = (a_{41} + a_{31}a_{21}/(c-1))\xi^{c-1} - a_{31}a_{21}/(c-1).$$

2.1.1) При $c \neq 0$ получим решение

$$\sigma_4 = (a_{41} + a_{31}a_{21}/(c-1))\xi^c/c - a_{31}a_{21}\xi/(c-1) +$$

$$a_{31}a_{22}\eta - a_{33}a_{21}\mu/(c-1) + a_{22}a_{33}\nu - (a_{41} - a_{31}a_{21})/c.$$

2.1.2) При $c = 0$ будем иметь решение

$$\sigma_4 = (a_{41} - a_{31}a_{21}) \ln \xi + a_{31}a_{21}\xi + a_{31}a_{22}\eta + a_{33}a_{21}\mu + a_{22}a_{33}\nu - a_{31}a_{21}.$$

2.2) И, наконец, пусть $c = 2$. Тогда интегрируя систему

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \nu} = a_{22}a_{33}, \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \eta} = a_{31}a_{22}, \quad \frac{\partial \sigma_4}{\partial \mu} = a_{33}a_{23}\mu - a_{33}a_{21} + a_{31}a_{23}\xi,$$

$$\frac{\partial \sigma_4}{\partial \xi} = a_{31}a_{23}\mu + (a_{41} + a_{31}a_{21})\xi - a_{31}a_{21},$$

получаем

$$\sigma_4 = a_{31}a_{23}\xi\mu + (a_{41} + a_{31}a_{21})\xi^2/2 - a_{31}a_{21}\xi + a_{33}a_{23}\mu^2/2 - a_{33}a_{21}\mu + \\ a_{31}a_{22}\eta + a_{22}a_{33}\nu - (a_{41} - a_{31}a_{21})/2.$$

Таким образом, теорема 5 доказана.

Следствие 5. Множество автоморфизмов, вычисленных в теореме 5, содержит подмножество внутренних автоморфизмов:

$$\sigma_1 = \xi, \quad \sigma_2 = a_{22}\eta + a_{21}\xi^{c-1}/(c-1) - a_{21}\xi/(c-1), \quad \sigma_3 = a_{33}\mu + a_{31}\xi - a_{31}, \\ \sigma_4 = (a_{41} + a_{31}a_{21}/(c-1))\xi^c/c - a_{31}a_{21}\xi/(c-1) + \\ a_{31}a_{22}\eta - a_{33}a_{21}\mu/(c-1) + a_{22}a_{33}\nu - (a_{41} - a_{31}a_{21})/c, \quad c \neq 1, c \neq 0.$$

Заключение

Выше сформулированная задача о нахождении множества всех автоморфизмов групп Ли $G_1 - G_5$ полностью решена. Решение поставленной задачи свелось к нахождению множества всех решений систем функциональных уравнений в классе как минимум один раз дифференцируемых функций. Данную задачу можно распространить и на любую другую группу Ли.

Список литературы

1. Постников М. М. *Группы и алгебры Ли*. М.: Наука, 1982.
2. Михайличенко Г. Г. *Групповая симметрия физических структур*. Барнаул: Барн. гос. пед. ун-т, 2003.

References

1. Postnikov M. M. *Lie groups and algebras*, Moscow: Nauka, 1982. (in Russian)
2. Mikhailichenko G. G. *Group symmetry of physical structures*, Barnaul: BGPU, 2003. (in Russian)

Информация об авторе

Владимир Александрович Кыров, кандидат физико-математических наук, доцент

SPIN 8220-8157 AuthorID: 213174

Scopus Author ID 9744004900

Author Information

Vladimir A. Kyrov, Candidate of Mathematics, Associate Professor

SPIN 8220-8157 AuthorID: 213174

Scopus Author ID 9744004900

*Статья поступила в редакцию 27.04.2026;
одобрена после рецензирования 30.07.2026; принята к публикации
06.08.2026*

*The article was submitted 27.04.2026;
approved after reviewing 30.07.2026; accepted for publication 06.08.2026*